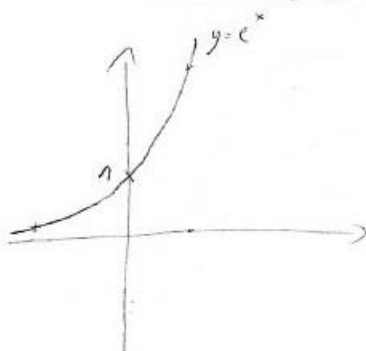


Fonctions exponentielle et logarithme

Fonctions exponentielle et logarithme	1
1. Fonction exponentielle	2
2. Fonction logarithme népérien.....	2
3. Fonctions logarithme de base a	3
4. Puissances réelles	3
5. Fonctions exponentielle de base a	4
6. Propriétés de la fonction exponentielle	5
7. Propriétés du logarithme népérien.....	6
8. Propriétés du logarithme de base a.....	7
9. Formules avec les puissances dans $\mathbb{R}$	8
10. Simplifier avec des puissances.....	9
11. Exercices avec des logarithmes	12
12. Graphes	14
13. Équations avec des puissances.....	16
14. Équations avec des logarithmes	18
15. Inéquations avec des puissances	21
16. Inéquations avec des logarithmes	23
17. Solutions détaillées	26

1. Fonction exponentielle

$x \mapsto e^x$ est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en 0.

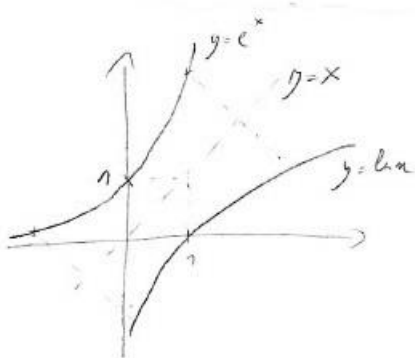


x	$-\infty$	$+\infty$
signe de e^x	+	

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$

2. Fonction logarithme népérien

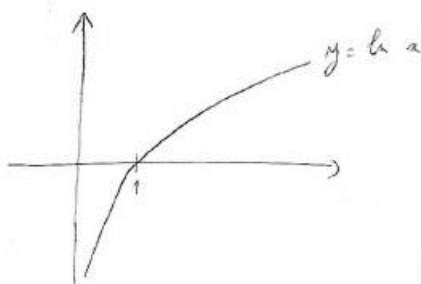
$x \mapsto \ln x$ est la fonction réciproque, définie sur $\mathbb{R}_+$, de la fonction exponentielle.



$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$$

et

$$\forall x \in]0; +\infty[: e^{\ln x} = x.$$



x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln x$	-	0	+

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

3. Fonctions logarithme de base a

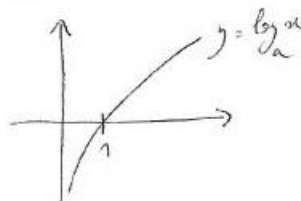
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$.

La fonction $x \mapsto \log_a x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{par } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On appelle cette fonction le logarithme de base a.

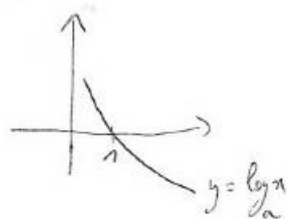
CAS 1 : $a > 1$
 $\ln a > 0$



x	0	1	$+\infty$
Signe de $\log_a x$		- 0 +	

x	0	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$+\infty$

CAS 2 : $0 < a < 1$
 $\ln a < 0$



x	0	1	$+\infty$
Signe de $\log_a x$		+ 0 -	

x	0	$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$	$-\infty$

4. Puissances réelles

Définition

$$\forall a \in]0; +\infty[, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}$$

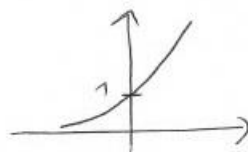
5. Fonctions exponentielle de base a

$$x \mapsto a^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

le domaine de définition est égal à $\mathbb{R}$.

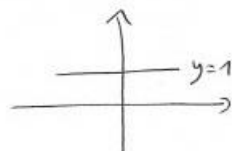
x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	

1. $a > 1$:



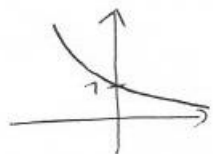
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

2. $a = 1$:



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	1	1

3. $0 < a < 1$



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow 0$

Si $a = e$ alors la fonction est $x \mapsto e^x$ et on l'appelle la fonction exponentielle. $e \approx 2,7$.

6. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriétés

Pour tous réels a, b :

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$(e^a)^b = e^{ab}.$$

Preuve en admettant la formule $e^{a+b} = e^a e^b$

$$e^a = e^{(a-b)+b} = e^{a-b} e^b$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$e^{-a} = e^{0-a} = \frac{e^0}{e^a} = \frac{1}{e^a}$$

$$(e^a)^b = e^{b \ln e^a} = e^{ba} = e^{ab}$$

c.q.f.d.

7. Propriétés du logarithme népérien

Propriétés

$$\forall a \in]0; +\infty[, \forall b \in]0; +\infty[,$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b.$$

$$\forall a \in]0; +\infty[, \forall b \in \mathbb{R}, \ln a^b = b \ln a.$$

Preuve

$$e^{\ln(ab)} = a b$$

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = a b$$

$$\text{Donc, } \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

$$e^{\ln \frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

$$e^{\ln a - \ln b} = \frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Donc, } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

$$\ln \frac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = -\ln b$$

$$\ln a^b = \ln e^{b \ln a} = b \ln a$$

c.q.f.d.

8. Propriétés du logarithme de base a

Propriétés

$$\forall x \in]0; +\infty[, \forall y \in]0; +\infty[, \forall a \in]0; +\infty[- \{1\},$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \forall y \in \mathbb{R}, \forall a \in]0; +\infty[- \{1\}, \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

Preuves

$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln a} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{y} = \frac{\ln \frac{1}{y}}{\ln a} = \frac{-\ln y}{\ln a} = -\frac{\ln y}{\ln a} = -\log_a y$$

$$\log_a x^y = \frac{\ln x^y}{\ln a} = \frac{y \ln x}{\ln a} = y \frac{\ln x}{\ln a} = y \log_a x$$

c.q.f.d.

9. Formules avec les puissances dans $\mathbb{R}$

Propriétés admises

Soient x et y deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}x^a x^b &= x^{a+b} \text{ si } ... \\(x^a)^b &= x^{a \cdot b} \text{ si } ... \\(x \cdot y)^a &= x^a y^a \text{ si } ...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^1 &= x \\x^{-1} &= \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\1^x &= 1 \\x^0 &= 1 \text{ si } x \neq 0 \\0^x &= 0 \text{ si } x > 0\end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \geq 0$$

Propriétés

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b} \text{ si } ...$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \text{ si } ...$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \text{ si } ...$$

Proof

$$x^{-b} = (x^b)^{-1} = \frac{1}{x^b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a \frac{1}{x^b} = x^a x^{-b} = x^{a-b}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \left(x \frac{1}{y}\right)^a = x^a \left(\frac{1}{y}\right)^a = x^a (y^{-1})^a = x^a y^{-a} = x^a \frac{1}{y^a} = \frac{x^a}{y^a}$$

c.q.f.d.

10. Simplifier avec des puissances

Les exercices suivant viennent des exercices 8.6 37, 38, 39, 40, 41 et de l'exercice 8.7 54 du livre MATEMATIKA de Jindra Petáková.

Exercice 1

Simplifier. $n \in \mathbb{N}$; $a, x \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$.

- a) $2^2 \cdot 2^3$
- b) $5^{-1} \cdot 5^5$
- c) $16 \cdot 2^{n-4}$
- d) $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$
- e) $x^{4n-3} \cdot x^{5-2n}$
- f) $a^5 \cdot b^3 \cdot a^{-2} \cdot b^4$

Solutions de l'exercice 1

- a) 2^5
- b) 5^4
- c) 2^n
- d) x^{15}
- e) x^{2n+2}
- f) $a^3 b^7$

Exercice 2

Simplifier. $n, k \in \mathbb{Z}$; $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$.

- a) $4^7 : 4^5$
- b) $\frac{7^{n+1}}{49}$
- c) $16 : 2^{n+4}$
- d) $\frac{x^3}{x^5 \cdot x^{-2}}$
- e) $y^{2n+3} : y^{n+3}$
- f) $\frac{a^{k+1}}{b^{k+2}} : \frac{a^{2k}}{b^3}$

Solutions de l'exercice 2

- a) 4^2
- b) 7^{n-1}
- c) 2^{-n}
- d) 1
- e) y^n
- f) $(ab)^{1-k}$

Exercice 3

Simplifier. Pour quelles valeurs vos calculs sont-ils corrects ?

- a) $(2x)^3$
- b) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{2^{-1}}{3}\right)^3$
- c) $(12x)^2 : (3x)^3$
- d) $\left(\frac{-x^{-1} \cdot y^2}{x^3}\right)^{-5}$
- e) $((x^{-2}y)^3)^2 \cdot (y^{-1})^{-6}$
- f) $\left(\frac{x}{2y^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^5$

Solutions de l'exercice 3

- a) $8x^3; x \in \mathbb{R}$
- b) $\frac{9}{256}$
- c) $\frac{16}{3x}; x \in \mathbb{R}^*$
- d) $-x^{20}y^{-10}; x, y \in \mathbb{R}^*$
- e) $\left(\frac{y}{x}\right)^{12}; x, y \in \mathbb{R}^*$
- f) $8x^{12}y^{11}; x, y \in \mathbb{R}^*$

Exercice 4

Simplifier. $x \in \mathbb{R}^*$.

- a) $2x^0$
- b) $(2x)^0$
- c) 2^0x
- d) $2 : x^0$
- e) $2^0 : x$
- f) 0^0

Solutions de l'exercice 4

- a) 2
- b) 1
- c) x
- d) 2
- e) $\frac{1}{x}$
- f) 0^0 n'est pas défini

Exercice 5

Simplifier. $k \in \mathbb{N}$.

- a) $(-1)^{-1}$
- b) -1^2
- c) $(-1)^3$
- d) $(-1)^{-2}$
- e) $(-1)^{2k}$
- f) $(-1)^{2k+1}$

Solutions de l'exercice 5

- a) -1
- b) -1
- c) -1
- d) 1
- e) 1
- f) -1

Exercice 6

Simplifier. Pour quelles valeurs vos calculs sont-ils corrects ?

- a) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$
- b) $\sqrt{z^3 \cdot \sqrt{z^2} \cdot \sqrt{z}}$
- c) $\sqrt[3]{k^2 \cdot \sqrt{k}}$
- d) $\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[4]{m^3}$
- e) $\sqrt{y \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{y}} \cdot \sqrt[4]{y}}$
- f) $\frac{\sqrt[5]{u \cdot \sqrt[6]{u^2}}}{\sqrt{u}}$
- g) $\frac{\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}}}{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}}$
- h) $\sqrt[6]{\frac{b^4}{\sqrt{b}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{\sqrt{b}}} \cdot \sqrt{b}$

Solutions de l'exercice 6

- a) $x^{\frac{3}{4}}; x \geq 0$
- b) $z^{\frac{17}{8}}; z \geq 0$
- c) $k^{\frac{5}{6}}; k \geq 0$
- d) $m; m \geq 0$
- e) $y^{\frac{7}{12}}; y > 0$
- f) $u^{\frac{-7}{30}}; u > 0$
- g) $1; a > 0$
- h) $b^{\frac{23}{12}}; b > 0$

11. Exercices avec des logarithmes

Les exercices 7 à 10 suivant viennent des exercices 4.12 69, 72, 73, 75 viennent du livre MATEMATIKA de Jindra Petáková.

Exercice 7

Simplifier.

- a) $\log_{\frac{1}{3}} 9$
- b) $\log_5 125$
- c) $\log_7 \sqrt{7}$
- d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$
- e) $\log_8 \sqrt{2}$
- f) $\log_5 1$
- g) $\log_{0,25} 4$
- h) $\log_{0,2} 0,04$

Solutions de l'exercice 7

- a) -2
- b) 3
- c) $\frac{1}{2}$
- d) -8
- e) $\frac{1}{6}$
- f) 0
- g) -1
- h) 2

Exercice 8

Simplifier. Est-ce que $x < 0$, $0 < x < 1$ ou $1 < x$?

- a) $x = 2 \log 4 + \log 3 - \log 6$
- b) $x = \log_6 12 - \log_6 \frac{1}{12} - 2$
- c) $x = 2 \log_{0,2} 4 + \log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 6$
- d) $x = \ln 4 + \ln \frac{1}{3} - 2 \left(\ln 2 + \ln \frac{1}{4} \right)$

Solutions de l'exercice 8

- a) $x = \log 8 ; 0 < x < 1$
- b) $x = \log_6 4 ; 0 < x < 1$
- c) $x = \log_{0,2} 8 ; x < 0$
- d) $x = \ln \frac{16}{3} ; 1 < x$

Exercice 9

Simplifier.

- a) $\log_2 \log_2 16$
- b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$
- c) $\log_5 \frac{1}{25} - \left(\log_{\frac{1}{3}} 9\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$
- d) $3 \log_2 \frac{5}{3} - 2 \log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{1}{30}$
- e) $\log^2 2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$
- f) $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$

Solutions de l'exercice 9

- a) 2
- b) -1
- c) -10
- d) -3
- e) 1
- f) 8

Exercice 10

Exprimer l'expression en fonction de $\log a$, $\log b$ et $\log c$.

- a) $\log \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}}$
- b) $\log \sqrt{\frac{10a}{bc}}$
- c) $\log \frac{(a+b)^2}{c}$

Solutions de l'exercice 10

- a) $2 \log a + 3 \log b - 2 - \frac{1}{2} \log c$
- b) $\frac{1}{2} (\log a - \log b - \log c + 1)$
- c) $2 \log(a + b) - \log c$

Exercice 11

Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

- a) $f(x) = \ln(4x + 3)$
- b) $f(x) = \ln(-2x + 1)$
- c) $f(x) = \ln(10x^2 + x - 3)$
- d) $f(x) = \ln \frac{3x+4}{2-5x}$

Solutions de l'exercice 11

- a) $\mathcal{D}_f = \left] \frac{-3}{4}; +\infty \right[$
- b) $\mathcal{D}_f = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$
- c) $\mathcal{D}_f = \left] -\infty; \frac{-3}{5} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$
- d) $\mathcal{D}_f = \left] \frac{-4}{3}; \frac{2}{5} \right[$

12. Graphes

Exercice 12

Tracer un schéma représentant la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

1) $f(x) = 3(e)^{x+6} - 4$

2) $f(x) = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + 3$

3) $f(x) = 2 \log_3(x - 3) + 4$

4) $f(x) = 3 \log_{\frac{1}{4}}(x + 2) - 1$

5) $f(x) = -0,5(e)^{x-3} - 10$

6) $f(x) = 0,5(e)^{x+3} + 20$

7) $f(x) = -0,5\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} + 5$

8) $f(x) = 0,5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 2$

9) $f(x) = 2 \log_5(x + 4) - 5$

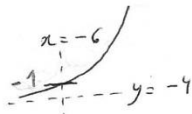
10) $f(x) = -3 \log_5(x + 2) + 4$

11) $f(x) = 4 \log_{\frac{1}{4}}(x - 2) + 3$

12) $f(x) = -\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) - 3$

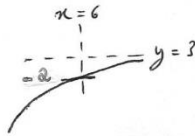
Solution de l'exercice 12

1)



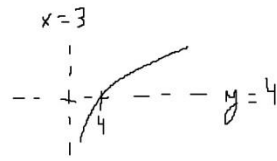
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-4	$+\infty$

2)



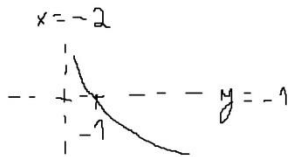
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	3	$+\infty$

3)



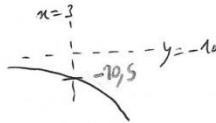
x	3	$+\infty$
$f(x)$	4	$+\infty$

4)



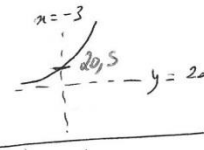
x	-2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

5)



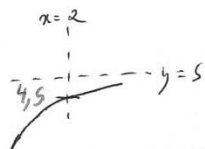
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-10	$-\infty$

6)



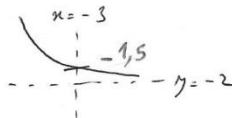
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

7)



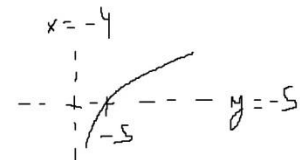
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	5	$+\infty$

8)



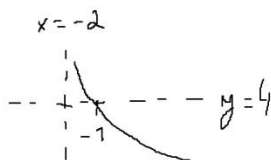
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

9)



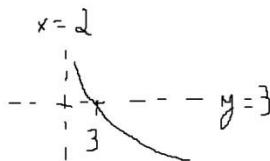
x	-4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

10)



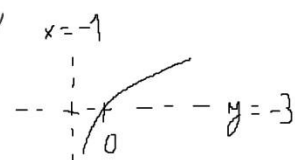
x	-2	$+\infty$
$f(x)$	4	$+\infty$

11)



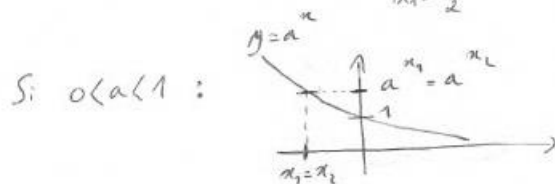
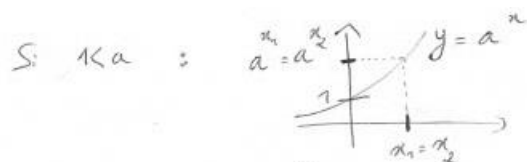
x	2	$+\infty$
$f(x)$	3	$+\infty$

12)



x	-1	$+\infty$
$f(x)$	-3	$+\infty$

13. Équations avec des puissances



Conclusion : $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ si $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$
- $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$
- $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

Solutions de l'exercice 13

- $\{2\}$
- $\{2\}$
- $\{2\}$
- $\{-2\}$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- $3^x + 3^{x+1} = 108$
- $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

Solutions de l'exercice 14

- $\{3\}$
- $\{-2\}$

Exercice 15 (facultatif)

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Solutions de l'exercice 15

- $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Exercice 16

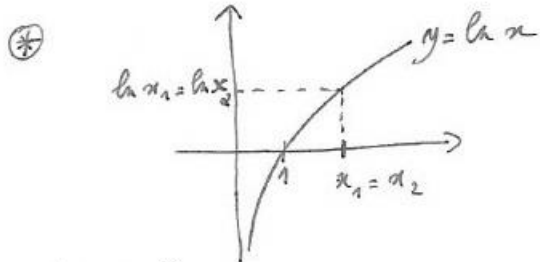
Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$
- b) $5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) = 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$
- c) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$
- d) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

Solutions de l'exercice 16

- a) $\{0; 1\}$
- b) $\{1\}$
- c) $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$
- d) $\{2\}$

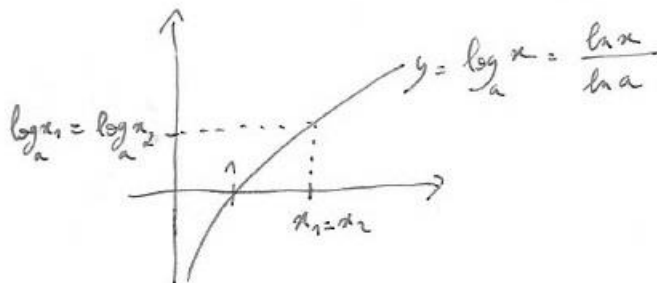
14. Équations avec des logarithmes



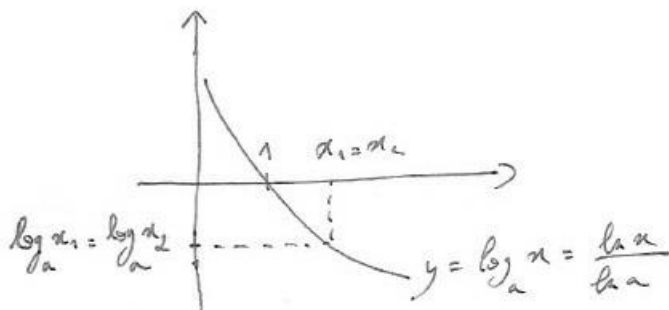
$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R} :$$

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

⊛ Si $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$: $\ln a > 0$.



⊛ Si $a \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$: $\ln a < 0$.



⊛ $\forall a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_2(x+1) = 3$
- b) $4 \log_3(2x-1) = 12$
- c) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$
- d) $\log_4(5x-4) = 2$

Solutions de l'exercice 17

- a) $\{7\}$
- b) $\{14\}$
- c) $\{-2\}$
- d) $\{4\}$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(-3x)$
- b) $\log x^2 = \log(4 - x^2)$
- c) $\log_{0,1}(x^2 - 5x) = \log_{0,1}(5x + 11)$
- d) $\log_2(x^2 - x) = \log_2 x$

Solutions de l'exercice 18

- a) $\{-5\}$
- b) $\{\pm\sqrt{2}\}$
- c) $\{-1; 11\}$
- d) $\{2\}$

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$
- b) $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$
- c) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$
- d) $\log(x+3) = \log x + \log 3$

Solutions de l'exercice 19

- a) $\{100\}$
- b) $\{2\}$
- c) $\{1\}$
- d) $\{\frac{3}{2}\}$

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

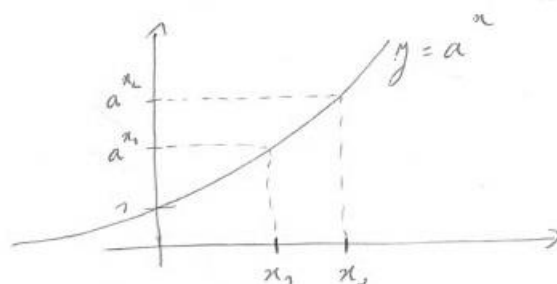
- a) $3^x = 10$
- b) $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$
- c) $5^{x+1} = 4$
- d) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$
- e) $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$
- f) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$

Solutions de l'exercice 20

- a) $\{\log_3 10\}$
- b) $\left\{\log_{\frac{16}{245}} 16\right\}$
- c) $\left\{\log_5 \frac{4}{5}\right\}$
- d) $\{\log_6 18\}$
- e) $\left\{\log_7 \frac{2}{49}\right\}$
- f) $\{\log_3 2; -1\}$

15. Inéquations avec des puissances

Si $1 < a$:



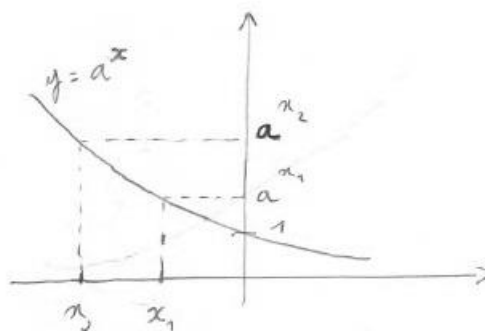
$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

$$a^{x_1} \leq a^{x_2} \Leftrightarrow a^{x_1} \leq a^{x_2} \text{ ou } a^{x_1} = a^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq x_2$$

Si $0 < a < 1$:



$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

$$a^{x_1} \leq a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $3^{x+5} < 1$
- b) $0,125^{2x+3} \leq 16$
- c) $3^{x-5} < 0$
- d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$
- e) $2^{3x-4} \geq 1$
- f) $0,1^{2x} \leq 1$
- g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > 1$
- h) $3^{x-1} > 9$
- i) $\left(\frac{2}{7}\right)^x \cdot 3^{x+4} > -1$

Solutions de l'exercice 21

- a) $] -\infty; -5[$
- b) $\left[\frac{-13}{6}; +\infty[$
- c) $\emptyset$
- d) $\mathbb{R}$
- e) $\left[\frac{4}{3}; +\infty[$
- f) $[0; +\infty[$
- g) $] -\infty; -3[$
- h) $]3; +\infty[$
- i) $\mathbb{R}$

Exercice 22

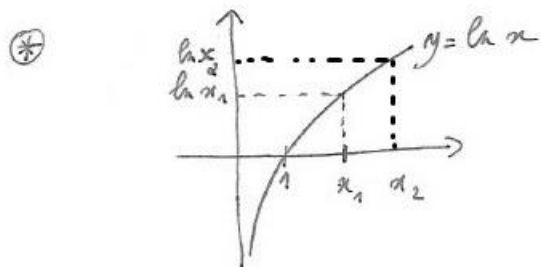
Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $3^{x+4} \geq 3^{2x-1}$
- b) $4^{x+5} < 16^{x+1}$
- c) $0,2^{3x-2} \geq 0,2^{x+5}$
- d) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$
- e) $2^x \cdot 2^{x+1} < 2^{x+3}$
- f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{8}$

Solutions de l'exercice 22

- a) $] -\infty; 5]$
- b) $]3; +\infty[$
- c) $] -\infty; \frac{7}{2}]$
- d) $] -\infty; -2[\cup]4; +\infty[$
- e) $] -\infty; 2[$
- f) $]2; +\infty[$

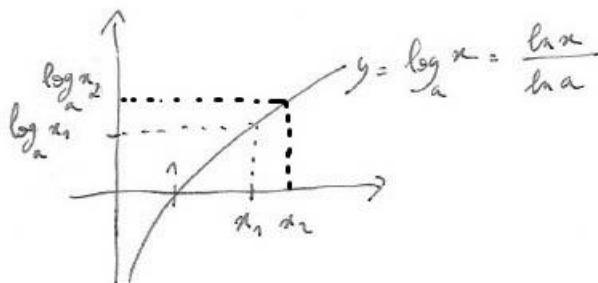
16. Inéquations avec des logarithmes



$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R} :$

$$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

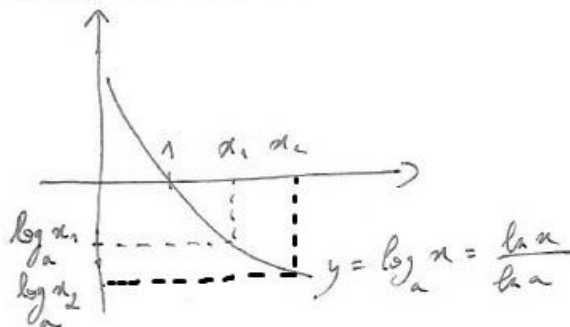
⑦ Si $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$: $\ln a > 0$.



$\forall a \in]1; +\infty[, \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

⑧ Si $a \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$: $\ln a < 0$.



$\forall a \in]0; 1[, \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_3(x + 4) \leq 4$
- b) $\log_{0,1}(x - 6) < 2$

Solution de l'exercice 23

- a) $S =]-4; 77]$
- b) $S = \left] \frac{601}{100}; +\infty \right[$

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 4) \geq -3$
- b) $\log_5(2x - 1) > -1$

Solution de l'exercice 24

- a) $S =]-2; 2]$
- b) $S = \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_3(x - 4) < 0$
- b) $\log_5(x^2 - 2x + 1) \geq 0$
- c) $\log_{0,3} \frac{x+7}{2-x} \geq 0$

Solution de l'exercice 25

- a) $S =]4; 5[$
- b) $S =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$
- c) $S = \left] -7; \frac{-5}{2} \right]$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) \leq 0$
- b) $\log_{\frac{4}{7}}(4x^2 + 3x) > 0$
- c) $\log_{1,2} \left(4 + \frac{2}{x} \right) \geq 0$

Solution de l'exercice 26

- a) $S = [-4; +\infty[$
- b) $S = \left] -1; \frac{-3}{4} \right[\cup \left] 0; \frac{1}{4} \right[$
- c) $S = \left] -\infty; \frac{-2}{3} \right] \cup]0; +\infty[$

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $3^{2x} \leq 7$
- b) $0,2^x > 3$
- c) $4^x \cdot 2^x \leq 100$

Solution de l'exercice 27

- a) $] -\infty; \log_9 7]$
- b) $] -\infty; \log_{0,2} 3[$
- c) $] -\infty; \log_8 100]$

Exercice 28

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $25^x - 9 \cdot 5^x + 20 < 0$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$
- c) $2^x - 5 \cdot 4^{x-2} < 1 - 2^{x-1}$

Solution de l'exercice 28

- a) $] \log_5 4; 1[$
- b) $[1; +\infty[$
- c) $] -\infty; \log_2 \frac{4}{5}[\cup]2; +\infty[$

17. Solutions détaillées

Solution détaillée de l'exercice 13

a)

Résoudre $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2^{3x-1} \cdot 4 &= 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x && \Leftrightarrow 2^{3x-1} \cdot 2^2 = (2^3)^{x+1} \cdot (2^{-1})^x \\ &&& \Leftrightarrow 2^{3x-1+2} = 2^{3x+3} \cdot 2^{-x} \\ &&& \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 2^{3x+3-x} \\ &&& \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 2^{2x+3} \\ &&& \Leftrightarrow 3x+1 = 2x+3 && \text{car } t \mapsto 2^t \text{ est } \nearrow \\ &&& \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{81}{16} &= \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1} && \Leftrightarrow \left(\frac{16}{81}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\right)^{x+1} \\ &&& \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-x-1} \\ &&& \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x-2} \\ &&& \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-2} \\ &&& \Leftrightarrow -4 = -x-2 && \text{car } t \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^t \text{ est } \searrow \\ &&& \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

Solution détaillée de l'exercice 14

a)

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{x+1} &= 108 && \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3^1 = 108 \\ &&& \Leftrightarrow 3^x(1+3) = 108 \\ &&& \Leftrightarrow 3^x \cdot 4 = 108 \\ &&& \Leftrightarrow 3^x = 27 \\ &&& \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \\ &&& \Leftrightarrow x = 3 && \text{car } t \mapsto 3^t \text{ est } \nearrow \end{aligned}$$

$$S = \{3\}$$

Solution détaillée de l'exercice 15

a)

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} &= 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} & (1) & \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x + 5^x \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5^x \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 2^{2x} \cdot 2^{-1} \\
 & \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x + 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 5^x \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 5^x \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \\
 & \Leftrightarrow 4^x (2 + 2^{-1}) = 5^x \left(5^{\frac{1}{2}} - 5^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 & \Leftrightarrow 4^x \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 5^x \left(5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 & \Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x} = \frac{5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}}{2 + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}}{\frac{5}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{2}{5} = \frac{5^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}} - 1}{5^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{5} = \frac{4}{5^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{5} = \frac{8}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x} = \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5} \right)^x = \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Solution détaillée de l'exercice 16

a)

$$\begin{aligned}
 9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} &= \frac{10}{3} & \Leftrightarrow 9^x \cdot 9^{-0,5} + 9^{0,5} \cdot 9^{-x} &= \frac{10}{3} \\
 & & \Leftrightarrow 9^x \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 9^{-x} &= \frac{10}{3} \\
 & & \Leftrightarrow 9^x + 9 \cdot 9^{-x} &= 10 \\
 & & \Leftrightarrow 9^x \cdot 9^x + 9 \cdot 9^{-x} \cdot 9^x &= 10 \cdot 9^x \\
 & & \Leftrightarrow 9^{2x} + 9 \cdot 9^0 &= 10 \cdot 9^x \\
 & & \Leftrightarrow 9^{2x} - 10 \cdot 9^x + 9 &= 0
 \end{aligned}$$

Posons $t = 9^x$.

$$\begin{aligned}
 9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} &= \frac{10}{3} & \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 &= 0 \\
 & & \Leftrightarrow (t-1)(t-9) &= 0 \\
 & & \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = 9 \\
 & & \Leftrightarrow 9^x = 1 \text{ ou } 9^x = 9 \\
 & & \Leftrightarrow 9^x = 9^0 \text{ ou } 9^x = 9^1 \\
 & & \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 & \quad \text{car } t \mapsto 9^t \text{ est } \nearrow
 \end{aligned}$$

$$S = \{0; 1\}$$

b)

$$\begin{aligned}
 5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) &= 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50 & (1) & \Leftrightarrow (5^{2x})^2 - 5 \cdot 5^{2x} = 3 \cdot (5^{2x} \cdot 5 + 5^{2x}) + 50 \\
 & & & \Leftrightarrow (5^{2x})^2 - 5 \cdot 5^{2x} = 18 \cdot 5^{2x} + 50 \\
 & & & \Leftrightarrow (5^{2x})^2 - 23 \cdot 5^{2x} - 50 = 0
 \end{aligned}$$

Posons $t = 5^{2x}$.

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow t^2 - 23 \cdot t - 50 = 0 \\
 \Delta &= (-23)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 529 + 200 = 729
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\Delta} = 27$$

$$t_1 = \frac{-(-23) + 27}{2 \cdot 1} = 25$$

$$t_2 = \frac{-(-23) - 27}{2 \cdot 1} = -2$$

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow t = 25 \text{ ou } t = -2 \\
 & \Leftrightarrow 5^{2x} = 25 \text{ ou } 5^{2x} = -2 \\
 & \Leftrightarrow 5^{2x} = 25 & \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, 5^{2x} > 0 \\
 & \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^2 \\
 & \Leftrightarrow 2x = 2 & \text{car } t \mapsto 5^t \text{ est } \nearrow \\
 & \Leftrightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

$$S = \{1\}$$

Solution détaillée de l'exercice 17

a)

$$\begin{aligned}\log_2(x+1) = 3 & \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3 \log_2 2 \\ & \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_2 2^3 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 2^3 \quad \text{car } t \mapsto \log_2 t \text{ est } \nearrow \\ & \Leftrightarrow x = 7\end{aligned}$$

$$S = \{7\}$$

Solution détaillée de l'exercice 18

a)

$$\begin{aligned}\log_5(x^2 + 2x) &= \log_5(-3x) \quad (1) \\ x^2 + 2x &= -3x \quad \text{car } t \mapsto \log_5 t \text{ est } \nearrow \\ x^2 + 5x &= 0 \\ x(x+5) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x &= -5\end{aligned}$$

Filtrage :

$$\begin{aligned}\text{Si } x = 0 \text{ alors} \quad (1) \quad & \Leftrightarrow \log_5(0^2 + 2 \cdot 0) = \log_5(-3 \cdot 0) \\ & \Leftrightarrow \log_5(0) = \log_5(0) \\ & \Leftrightarrow \text{FAUX}\end{aligned}$$

En effet $\log_5(0)$ n'est pas défini.

0 n'est pas solution de l'équation.

$$\begin{aligned}\text{Si } x = -5 \text{ alors} \quad (1) \quad & \Leftrightarrow \log_5((-5)^2 + 2(-5)) = \log_5(-3(-5)) \\ & \Leftrightarrow \log_5(15) = \log_5(15) \\ & \Leftrightarrow \text{VRAI}\end{aligned}$$

-5 est solution de l'équation.

$$S = \{-5\}$$

Solution détaillée de l'exercice 20

a)

$$\begin{aligned} 3^x = 10 & \Leftrightarrow \log_3 3^x = \log_3 10 & \text{car } t \mapsto \log_3 t \text{ est } \nearrow \\ & \Leftrightarrow x \log_3 3 = \log_3 10 \\ & \Leftrightarrow x = \log_3 10 \end{aligned}$$

$$S = \{\log_3 10\}$$

b)

$$\begin{aligned} 5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1} & \Leftrightarrow 5^x \cdot 49^x = 16^{x-1} \\ & \Leftrightarrow (5 \cdot 49)^x = 16^{x-1} \\ & \Leftrightarrow 245^x = 16^x 16^{-1} \\ & \Leftrightarrow 16 = \frac{16^x}{245^x} \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{16}{245}\right)^x = 16 \\ & \Leftrightarrow \log_{\frac{16}{245}} \left(\frac{16}{245}\right)^x = \log_{\frac{16}{245}} 16 & \text{car } t \mapsto \log_{\frac{16}{245}} t \text{ est } \searrow \\ & \Leftrightarrow x \log_{\frac{16}{245}} \frac{16}{245} = \log_{\frac{16}{245}} 16 \\ & \Leftrightarrow x = \log_{\frac{16}{245}} 16 \end{aligned}$$

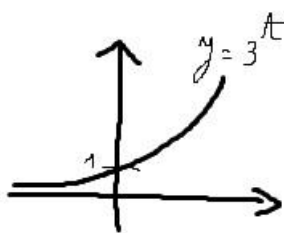
$$S = \left\{ \log_{\frac{16}{245}} 16 \right\}$$

Solution détaillée de l'exercice 21

a)

$$\begin{aligned} 3^{x+5} < 1 &\Leftrightarrow 3^{x+5} < 3^0 \\ &\Leftrightarrow x+5 < 0 \quad \text{car } t \mapsto 3^t \text{ est } \nearrow \\ &\Leftrightarrow x < -5 \end{aligned}$$

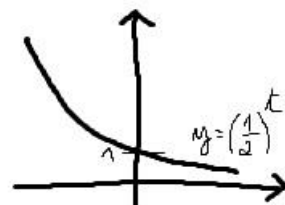
$$S =]-\infty; -5[$$



b)

$$\begin{aligned} 0,125^{2x+3} \leq 16 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \leq 16 \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad \text{car } t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t \text{ est } \searrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6x+9} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \\ &\Leftrightarrow 6x+9 \geq -4 \\ &\Leftrightarrow 6x \geq -13 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{-13}{6} \end{aligned}$$

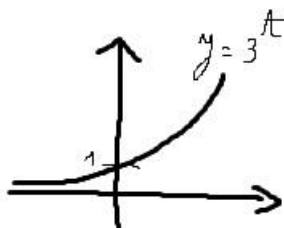
$$S = \left[\frac{-13}{6}; +\infty\right[$$



c)

$$3^{x-5} < 0$$

$$S = \emptyset \quad \text{car } 3^t > 0 \text{ pour tout réel } t$$



d)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$$

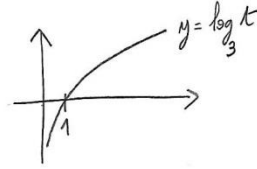
$$S = \mathbb{R} \quad \text{car } \left(\frac{1}{5}\right)^t > 0 \text{ pour tout réel } t$$

Solution détaillée de l'exercice 23

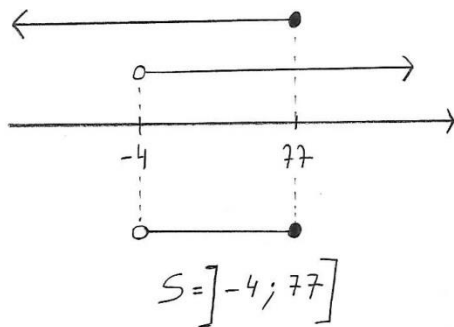
a)

$$\begin{aligned}
 \log_3(x+4) \leq 4 &\Leftrightarrow \log_3(x+4) \leq 4 \log_3 3 \\
 &\Leftrightarrow \log_3(x+4) \leq \log_3 3^4 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \leq 3^4 \\ x+4 > 0 \end{cases} \text{ car la fonction } t \mapsto \log_3 t \text{ est strictement croissante}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x+4 \leq 3^4 &\Leftrightarrow x+4 \leq 81 \\
 &\Leftrightarrow x \leq 81-4 \\
 &\Leftrightarrow x \leq 77
 \end{aligned}$$



CE : $x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$



b)

$$\begin{aligned}
 \log_{0,1}(x-6) &< 2 \\
 \log_{0,1}(x-6) &< 2 \log_{0,1} 0,1 \\
 \log_{0,1}(x-6) &< \log_{0,1} 0,1^2 \\
 x-6 &> 0,1^2 \text{ car la } t \mapsto \log_{0,1} t \text{ est strictement décroissante}
 \end{aligned}$$

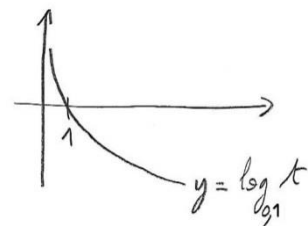
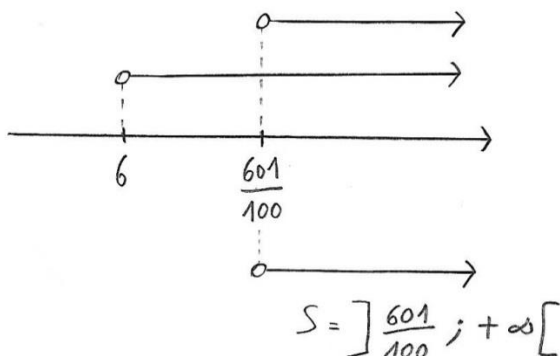
$$x-6 > \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$x > \frac{1}{100} + 6$$

$$x > \frac{601}{100}$$

CE : $x-6 > 0$
 $x > 6$

Conclusion :



Solution détaillée de l'exercice 25

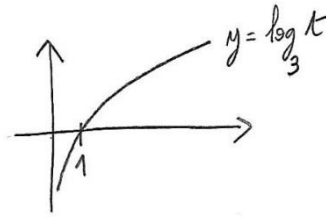
a)

$$\log_3(x-4) < 0$$

$$\log_3(x-4) < \log_3 1$$

$$x-4 < 1 \quad \text{car } t \mapsto \log_3 t \text{ est } \nearrow$$

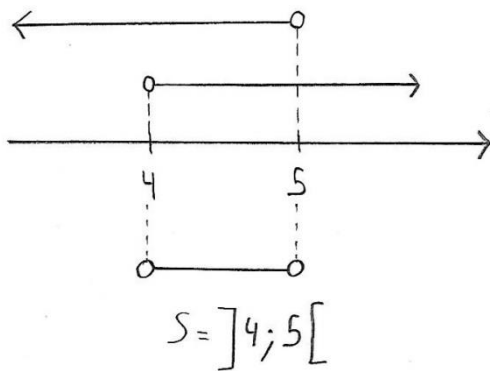
$$x < 5$$



$$\text{CE : } x-4 > 0$$

$$x > 4$$

Conclusion :



b)

$$\log_5(x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

$$\log_5(x^2 - 2x + 1) \geq \log_5 1$$

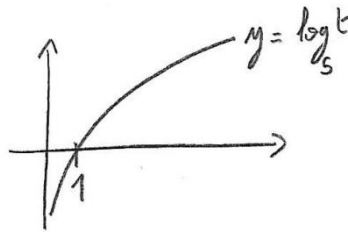
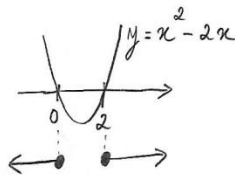
$$x^2 - 2x + 1 \geq 1 \quad \text{car } t \mapsto \log_5 t \text{ est } \nearrow$$

$$x^2 - 2x \geq 0$$

$$x(x - 2) \geq 0$$

$$a = 1 > 0$$

$$\Delta > 0$$



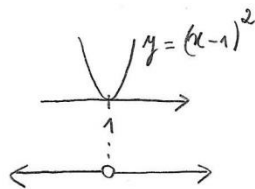
$$x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{CE: } x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$(x - 1)^2 > 0$$

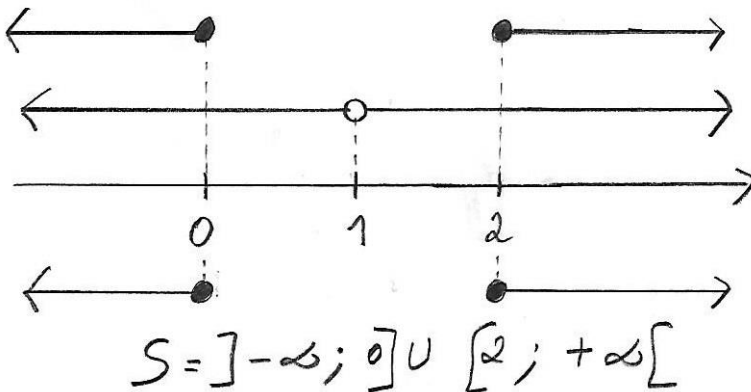
$$a = 1 > 0$$

$$\Delta = 0$$



$$x \neq 1$$

Conclusion :



c)

$$\log_{0,3} \frac{x+7}{2-x} \geq 0$$

$$\log_{0,3} \frac{x+7}{2-x} \geq \log_{0,3} 1$$

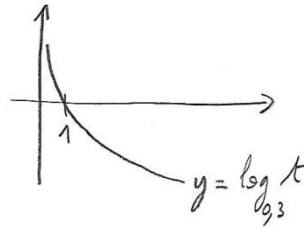
$$\frac{x+7}{2-x} \leq 1 \quad \text{car } t \mapsto \log_{0,3} t \text{ est } \searrow$$

$$\frac{x+7}{2-x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x+7}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{x+7-2+x}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{2x+5}{2-x} \leq 0$$



x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$	
signe de $2x+5$	-	○	+	+	$\nearrow$
signe de $2-x$	+	+	○	-	$\searrow$
signe de $\frac{2x+5}{2-x}$	-	○	+	-	

$\longleftarrow \bullet$ $\circ \longrightarrow$

$$x \in \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right] \cup]2; +\infty[$$

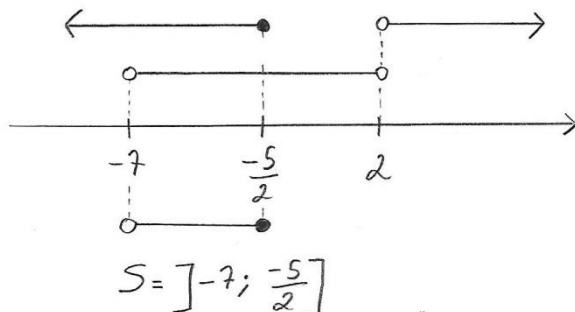
$$\text{CE : } \frac{x+7}{2-x} > 0$$

x	$-\infty$	-7	2	$+\infty$	
signe de $x+7$	-	○	+	+	$\nearrow$
signe de $2-x$	+	+	○	-	$\searrow$
signe de $\frac{x+7}{2-x}$	-	○	+	-	

$\circ \text{---} \circ$

$$x \in]-7; 2[$$

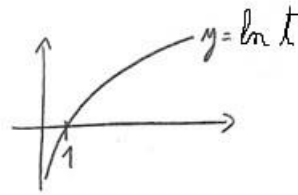
Conclusion :



Solution détaillée de l'exercice 27

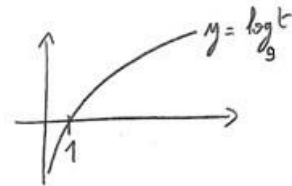
a)

$$\begin{aligned}
 3^{2x} \leq 7 &\Leftrightarrow (3^2)^x \leq 7 \\
 &\Leftrightarrow 9^x \leq 7 \\
 &\Leftrightarrow \ln 9^x \leq \ln 7 \quad \text{car } t \mapsto \ln t \text{ est } \nearrow \\
 &\Leftrightarrow x \ln 9 \leq \ln 7 \\
 &\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 7}{\ln 9} \quad \text{car } \ln 9 > 0 \\
 &\Leftrightarrow x \leq \log_9 7 \\
 S &=]-\infty; \log_9 7]
 \end{aligned}$$



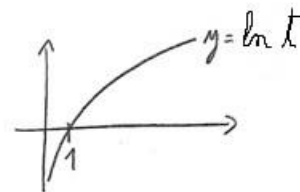
a)

$$\begin{aligned}
 3^{2x} \leq 7 &\Leftrightarrow (3^2)^x \leq 7 \\
 &\Leftrightarrow 9^x \leq 7 \\
 &\Leftrightarrow \log_9 9^x \leq \log_9 7 \quad \text{car } t \mapsto \log_9 t \text{ est } \nearrow \\
 &\Leftrightarrow x \log_9 9 \leq \log_9 7 \\
 &\Leftrightarrow x \leq \log_9 7 \\
 S &=]-\infty; \log_9 7]
 \end{aligned}$$



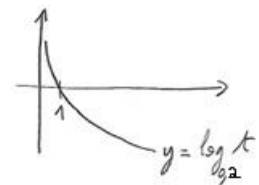
b)

$$\begin{aligned}
 0,2^x > 3 &\Leftrightarrow \ln 0,2^x > \ln 3 \quad \text{car } t \mapsto \ln t \text{ est } \nearrow \\
 &\Leftrightarrow x \ln 0,2 > \ln 3 \\
 &\Leftrightarrow x < \frac{\ln 3}{\ln 0,2} \quad \text{car } \ln 0,2 < 0 \\
 &\Leftrightarrow x < \log_{0,2} 3 \\
 S &=]-\infty; \log_{0,2} 3[
 \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned}
 0,2^x > 3 &\Leftrightarrow \log_{0,2} 0,2^x > \log_{0,2} 3 \\
 &\Leftrightarrow x \log_{0,2} 0,2 < \log_{0,2} 3 \quad \text{car } t \mapsto \log_{0,2} t \text{ est } \searrow \\
 &\Leftrightarrow x < \log_{0,2} 3 \\
 S &=]-\infty; \log_{0,2} 3[
 \end{aligned}$$



Solution détaillée de l'exercice 28

a)

$$\begin{aligned} 25^x - 9 \cdot 5^x + 20 < 0 & \Leftrightarrow (5^2)^x - 9 \cdot 5^x + 20 < 0 \\ & \Leftrightarrow (5^x)^2 - 9 \cdot 5^x + 20 < 0 \end{aligned}$$

Posons $t = 5^x$.

$$\begin{aligned} 25^x - 9 \cdot 5^x + 20 < 0 & \Leftrightarrow t^2 - 9 \cdot t + 20 < 0 \\ & \Leftrightarrow (t - 4)(t - 5) < 0 \\ & \Leftrightarrow 4 < t < 5 \\ & \Leftrightarrow 4 < 5^x < 5 \\ & \Leftrightarrow \log_5 4 < \log_5 5^x < \log_5 5 \quad \text{car } t \mapsto \log_5 t \text{ est } \nearrow \\ & \Leftrightarrow \log_5 4 < x < 1 \end{aligned}$$

$$S =]\log_5 4; 1[$$

